Informationsmaterial der Fachschaft

Mathematik

für Schüler, die die Jahrgangsstufe 11 nicht am

Antoniuskolleg

verbringen

Überblick über die Themen des Mathematikunterrichts in Klasse 11

Kapitel 4: Funktionen

- ganzrationale Funktionen
- Symmetrie: punktsymmetrisch und achsensymmetrisch
- Nullstellen von Funktionen

Kapitel 5: Einführung in die Differenzialrechnung

- Ableitung einer ganzrationalen Funktion, Ableitungsfunktionen
- Ableitungsregeln

Kapitel 6: Untersuchung ganzrationaler Funktionen

- Monotonie mithilfe der ersten Ableitung
- Extrema (Hoch- und Tiefpunkte) und ihre Bestimmung mithilfe der Ableitungen
- Wendepunkte und ihre Bestimmung mithilfe der Ableitungen
- Kurvendiskussion (Funktionsuntersuchung)

Die oben angeführten Themenbereiche sollten zumindest so weit bearbeitet werden, dass die darin angeführten Definitionen (Begriffe) bekannt und verstanden sind und die Rechenverfahren sicher beherrscht werden um typische Aufgaben zu lösen.

Die anderen Themenbereiche sollten zwar auch beherrscht werden, vorrangig sind allerdings die oben aufgeführten.

Die Angaben beziehen sich auf das am Antoniuskolleg in Klasse 11 eingeführte Schulbuch aus dem Klettverlag: LS 11, ISBN 3 – 12 – **73221**0 – 0.

Im Anhang finden sich Hinweise auf Arbeiten (Vergleichsklausuren der Bezirksregierung aus den letzten Jahren). Sie sind Beispiele für Klausuren, die in der Jahrgangsstufe 11 geschrieben werden, und sollten bei Eintritt in die Jahrgangsstufe 12 gelöst werden können.

Für die Fachschaft Mathematik

Klaus Mermet

Anhang

Unter der folgenden Internetadresse finden sich die Vergleichsklausuren der Bezirksregierung, die in den letzten Jahren geschrieben wurden. Die Aufgaben, die sich auf die Analysis beziehen, sollten zur Vorbereitung auf die Jahrgangsstufe 12 auf jeden Fall gelöst werden.

www.brd.nrw.de/BezRegDdorf/hierarchie/lerntreffs/mathe/structure/sekundar2/vergleichsarbeiten.php

Außerdem ist ein Beispiel für die Diskussion einer ganzrationalen Funktion beigefügt.

Aufgabe: Untersuchen Sie die Funktion

$$\mathbf{f(x) = \frac{1}{6}\,(3x^4 + 4x^3 - 12x^2)}$$

auf Symmetrie, Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte.
Zeichnen Sie den Graph der Funktion für $-3 \leq x \leq 2$ (1 LE = 2 cm).

Lösung:

1. Symmetrie

Die Funktion ist weder symmetrisch zur y-Achse (da auch ungerade Exponenten von x auftreten) noch punktsymmetrisch zum Ursprung (es treten auch gerade Exponenten von x auf).

2. Nullstellen

Die Nullstellen der Funktion f sind die Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{6}\,(3x^4 + 4x^3 - 12x^2) = 0$$
$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 = 0$$
$$x^2\,(3x^2 + 4x - 12) = 0$$
$$\underline{\underline{x_1 = 0}}$$

Mit Hilfe der p-q-Formel erhält man die beiden anderen Lösungen von x.

$$3x^2 + 4x - 12 = 0$$
$$x^2 + \frac{4}{3}x - 4 = 0$$
$$x_{2/3} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + 4}$$
$$\underline{\underline{x_2 \approx 1{,}4}}$$
$$\underline{\underline{x_3 \approx -2{,}8}}$$

Die Funktion hat Nullstellen in N_1 (0 | 0), N_2 (1,4 | 0) und N_3 (-2,8 | 0).

3. Extremwerte

Notwendige Bedingung für einen Extremwert: $f'(x) = 0$
Hinreichende Bedingung für einen Extremwert: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$ (Minimum)
$f'(x) = 0 \wedge f''(x) < =$ (Maximum)

$f'(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4x$ und $f''(x) = 6x^2 + 4x - 4$

$$f'(x) = 0$$
$$2x^3 + 2x^2 - 4x = 0$$
$$2x\,(x^2 + x - 2) = 0$$
$$2x = 0 \vee x^2 + x - 2 = 0$$
$$\underline{\underline{x_1 = 0}}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_{2/3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$

$$\underline{\underline{x_2 = 1}} \qquad \underline{\underline{x_3 = -2}}$$

Um Festzustellen welche Art von Extremwert vorliegt, setzt man die Lösungen in die zweite Ableitung der Funktion f ein.

$f''(0) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Maximum bei $x_1 = 0$
$f''(1) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Minimum bei $x_2 = 1$
$f''(-2) = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Minimum bei $x_3 = -2$

Zur Bestimmung der y-Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte setzt man die x-Werte in die Ausgangsgleichung (Funktionsgleichung) ein.

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = \frac{1}{6}(3 + 4 - 12) = -\frac{5}{6} \approx \underline{\underline{-0{,}8}}$$

$$f(-2) = \frac{1}{6}(48 - 32 - 48) = -\frac{32}{6} \approx \underline{\underline{-5{,}3}}$$

Die Funktion hat in H (0 | 0) einen Hochpunkt und in T_1 (1 | -0,8) und T_2 (-2 | -5,3) Tiefpunkte.

4. Wendepunkte

Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt: $f''(x) = 0$

Hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$$f''(x) = 0$$

$$6x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{2}{3}}$$

$$\underline{\underline{x_1 \approx 0{,}6}} \qquad \underline{\underline{x_2 \approx -1{,}2}}$$

Zur Überprüfung, ob es sich wirklich um Wendepunkte handelt, setzt man die Lösungen in die 3. Ableitung der Funktion ein.

$f'''(0{,}6) = 12 \bullet 0{,}6 + 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ Wendepunkt
$f'''(-1{,}2) = 12 \bullet (-1{,}2) + 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ Wendepunkt

Zur Bestimmung der y-Koordinaten der Wendepunkte setzt man die Lösungen in die Funktionsgleichung ein.

$f(0{,}6) \approx \frac{1}{6}\,(0{,}4 + 0{,}9 - 4{,}3) \approx \underline{\underline{-0{,}5}}$

$f(-1{,}2) \approx \frac{1}{6}\,(6{,}2 - 6{,}9 - 17{,}3) \approx \underline{\underline{-3}}$

Die Funktion hat Wendepunkte in W_1 (0,6 | -0,5) und W_2 (-1,2 | -3).

5. Funktionsgraph